III. 圏論から見た位相空間・正則構造

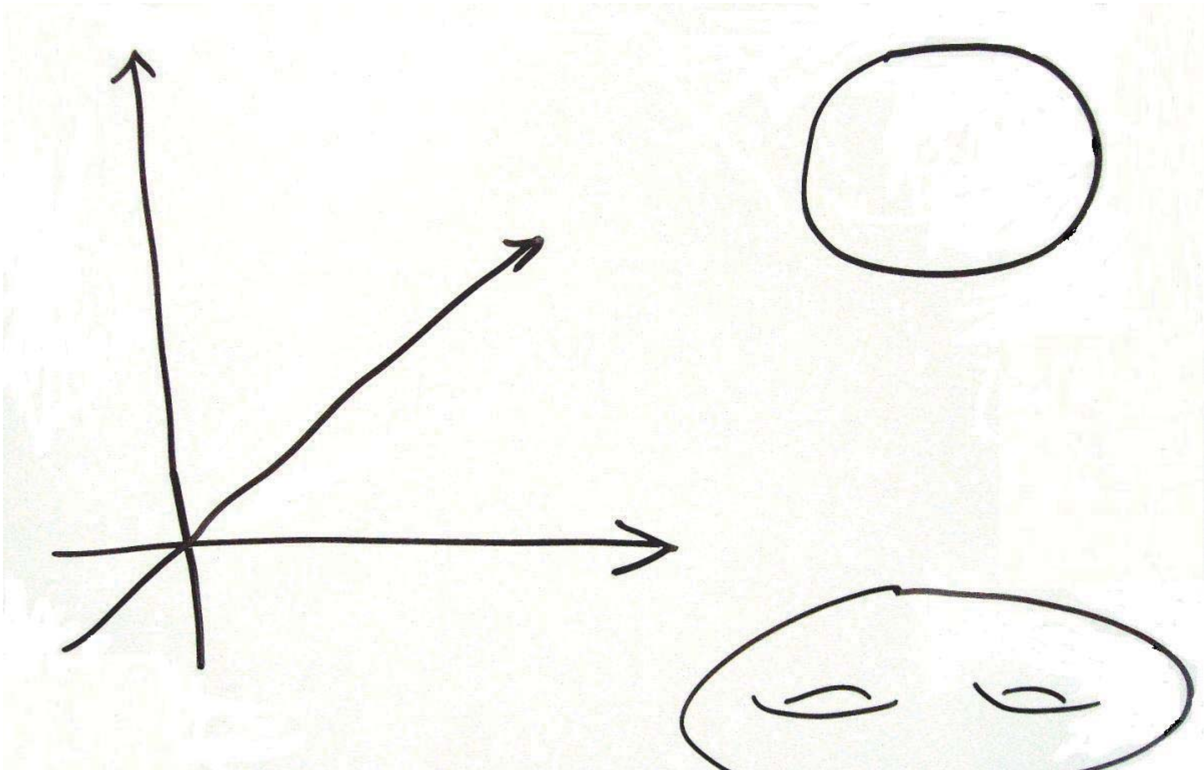
§1. 位相空間に付随する圏

T は位相空間とする。簡単のため位相多様体とする。これはつまり、

$$\forall t \in T,\ \exists t \text{ を含む開集合 } U \text{ s.t.}$$
$$U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$$

（＝「局所的にユークリッド空間と同相」）

例 : ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$、
（平面内の）単位円、曲面



T に対して　<u>圏 Open(T)</u>　を対応させることができる。

<u>圏の obj.</u>: T の開集合 U
<u>圏の mor.</u>: $U_1 \subseteq U_2$　（$U_1 \to U_2$ と書く）
（開集合の間の包含関係）

開集合の $\bigcap$, $\bigcup$ は <u>圏論的</u> に表現できる：

$U_1 \bigcap U_2$: $\square$ s.t.

$$(\exists V \to \square) \iff (\exists V \to U_1, V \to U_2)$$

$\bigcup_{i\in I} U_i$: $\square$ s.t.

$$(\exists \square \to V) \iff (\exists U_i \to V,\ \forall i \in I)$$

「閉集合 $\sim U$ がコンパクトである」というような命題も <u>圏論的</u> に表現可能：

「$U \bigcup \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = T \implies \exists$ 有限な $J \subseteq I$

s.t. $U \bigcup \left(\bigcup_{i\in J} U_i\right) = T$ 」

§2. 位相空間の復元

§1 では、$T \rightsquigarrow \mathrm{Open}(T)$ を対応させたが、逆の対応も可能。これはつまり、$\mathrm{Open}(T)$ の 圏構造 のみから位相空間 T を復元するということである。

定理 : T_1, T_2 は 位相多様体 とする。すると、$T \rightsquigarrow \mathrm{Open}(T)$ の関手性より定まる自然な写像

$$\Big(\text{同相写像 } T_1 \xrightarrow{\sim} T_2\Big)$$
$$\xrightarrow{\sim} \Big(\text{圏同値}\,\mathrm{Open}(T_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Open}(T_2)\Big)$$

は 全単射 である。

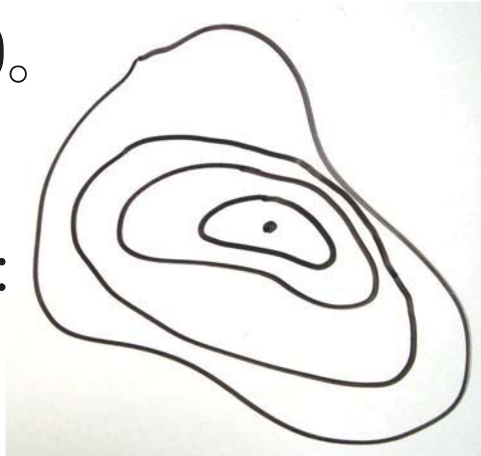
証明 : $\mathrm{Open}(T)$ 内で次のような系 $\mathcal{F}$ を考える :

$$\ldots \subseteq U_n \subseteq U_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq U_1$$

s.t. $\forall n,\ \exists V_n$ s.t. $U_n \subseteq\ (\sim V_n)\ \subseteq U_{n-1}$
かつ $(\sim V_n) \neq \emptyset$ はコンパクト。

すると、$(\sim V_n)$ たちの コンパクト性 より、

$$\mathcal{F}_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_n U_n \neq \emptyset。$$



次に、添え字のずれを許した
ような、系の間の射 を考える :

$$\mathcal{F} = (\ldots \subseteq U_n \subseteq \ldots)$$
$$\to \mathcal{F}' = (\ldots \subseteq U'_{n'} \subseteq \ldots)$$
$$(\implies \mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{F}'_\infty)$$

すると、

「$\mathcal{F}$ は（系の間の射に関して）極小 である」

$$\iff$$

$\mathcal{F}_\infty = \{t\}$ （つまり、「$\mathcal{F}_\infty$ の濃度は 1 」）。

従って、T は、

$$\Big\{ \text{(系の射に関して)} \underline{\text{極小}} \text{ な } \mathcal{F} \text{ の } \underline{\text{同値類}} \Big\}$$

として復元できる。

しかも、この復元は「$t \in U$」と両立的。□

§3. 平行四辺形の圏

§2 の話で、$T=\mathbb{R}^2$ としたとき、すべての開集合の代わりに、境界が 平行四辺形 になるような開集合で定義される 部分圏

$$\mathrm{Para}(T) \subseteq \mathrm{Open}(T)$$

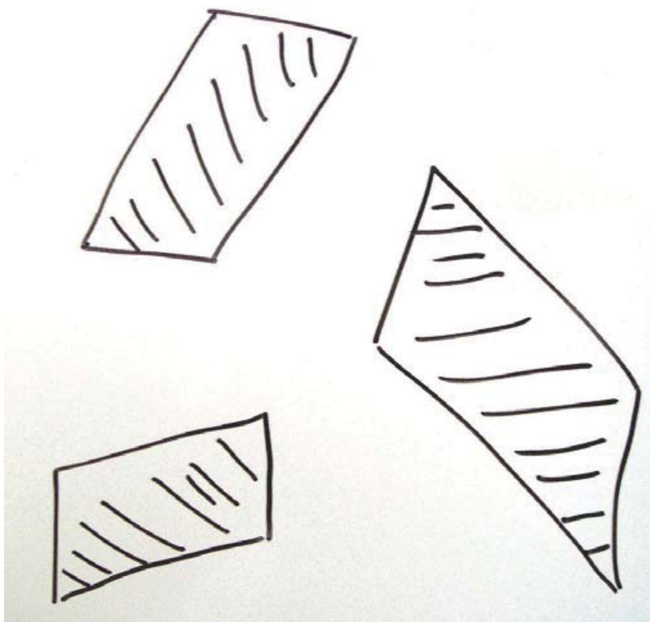
を考えることができる。
この部分圏は

$A \in M_2(\mathbb{R}),\ B \in \mathbb{R}^2$

で定義される アフィン線形的な変換

$\mathbb{R} \ni v \mapsto Av + B$

で保たれる。



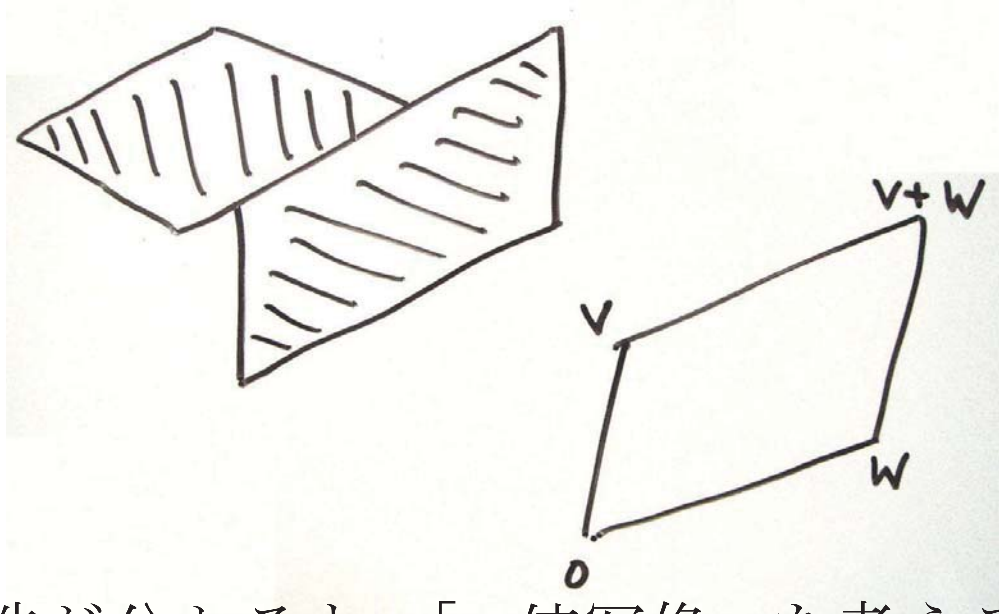
定理 : アフィン線形変換の関手性により、自然な全単射が定まる :

$$\Big(\text{アフィン線形変換 } \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2\Big)$$

$$\xrightarrow{\sim} \Big(\text{圏同値 } \mathrm{Para}(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Para}(\mathbb{R}^2)\Big)$$

証明 : §2 の証明と同様な議論により、$\mathbb{R}^2$ の下部位相空間を圏 $\mathrm{Para}(\mathbb{R}^2)$ より復元できる。また、平行移動との合成をとることにより、原点 が保たれると仮定してよい。

次に、隣接する $P_1, P_2 \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Para}(\mathbb{R}))$ の境界の共通部分をとることにより、「線分」を復元することができる。すると、原点を頂点にもつ P の境界をとることにより、$(v, w) \mapsto v + w$（ただし $v, w \in \mathbb{R}^2$）という $\mathbb{R}^2$ の群（加法）構造 を復元することができる。



群構造が分かると、「n 倍写像」を考えることにより、$\mathbb{Q}$ ベクトル空間構造 を復元し、ベクトル列の極限を考えることにより、$\mathbb{R}$ ベクトル空間構造 を復元することができる。□

§4. 四角、長方形の圏

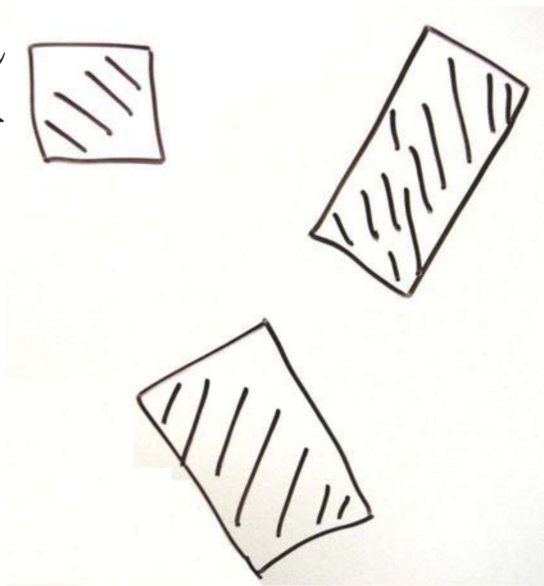
§3 の話で、$T = \mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ を 複素平面 と見ることもできる。すると、境界が「四角」や「長方形」となるような開集合の部分圏

$$\mathrm{Squr}(T) \subseteq \mathrm{Rect}(T) \subseteq \mathrm{Para}(T)$$

を考えることができる。これらの部分圏は、$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ に対して

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \lambda z + \mu \in \mathbb{C}$$
$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \lambda \overline{z} + \mu \in \mathbb{C}$$

のような（反）正則アフィン線形変換 で保たれる。

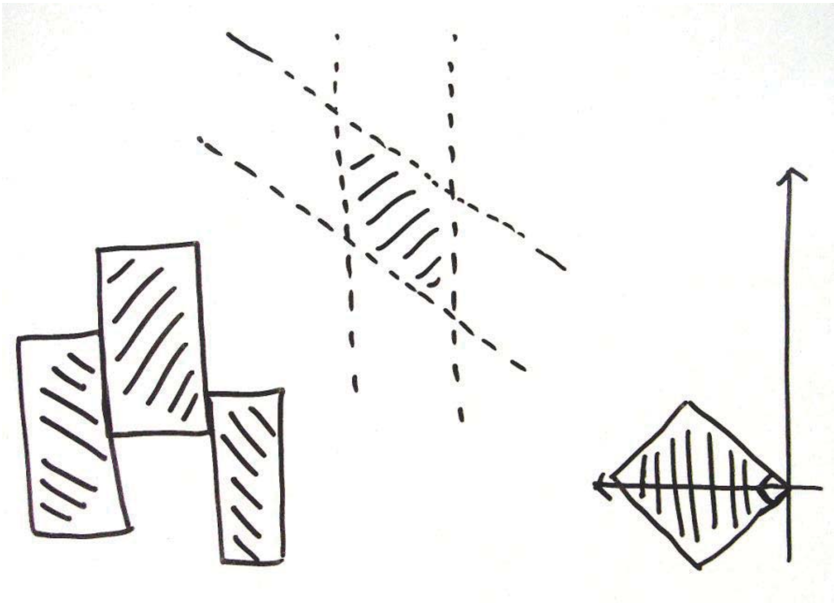


定理 : $\mathcal{C} \in \{\mathrm{Squr}, \mathrm{Rect}\}$ とすると、（反）正則アフィン線形変換の関手性により、自然な全単射が定まる：

$$\Big(（反）正則アフィン線形変換\ \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\Big)$$

$$\xrightarrow{\sim} \Big(圏同値\ \mathcal{C}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(\mathbb{C})\Big)$$

証明：§2 の証明と同様な議論により、$\mathbb{C}$ の下部位相空間を圏 $\mathcal{C}(\mathbb{C})$ より復元できる。次に、§3 の議論と同様に、「線分」を復元することができ、$P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}(\mathbb{R}))$ の隣接しない辺（＝「線分」）の対を考えることにより、「平行な線分」を復元することができる。



平行な線分 2 本の組を、二組とることにより、「平行四辺形」を復元し、§3 の議論と同様に、「群構造」や「$\mathbb{R}$ ベクトル空間構造」を復元することができる。最後に、原点を頂点にもつ四角や長方形を考えることにより、既に得られた $\mathbb{R}$ 線形写像が「直角」を保つことが帰結でき、従って $\mathbb{R}$ だけでなく $\mathbb{C}$ 上線形的または反線形的（＝「複素共役したら線形的」）になることが分かる。□

§5. リーマン面の定義

T は位相曲面とする。T 上の リーマン面 の構造＝ 正則構造 とは、

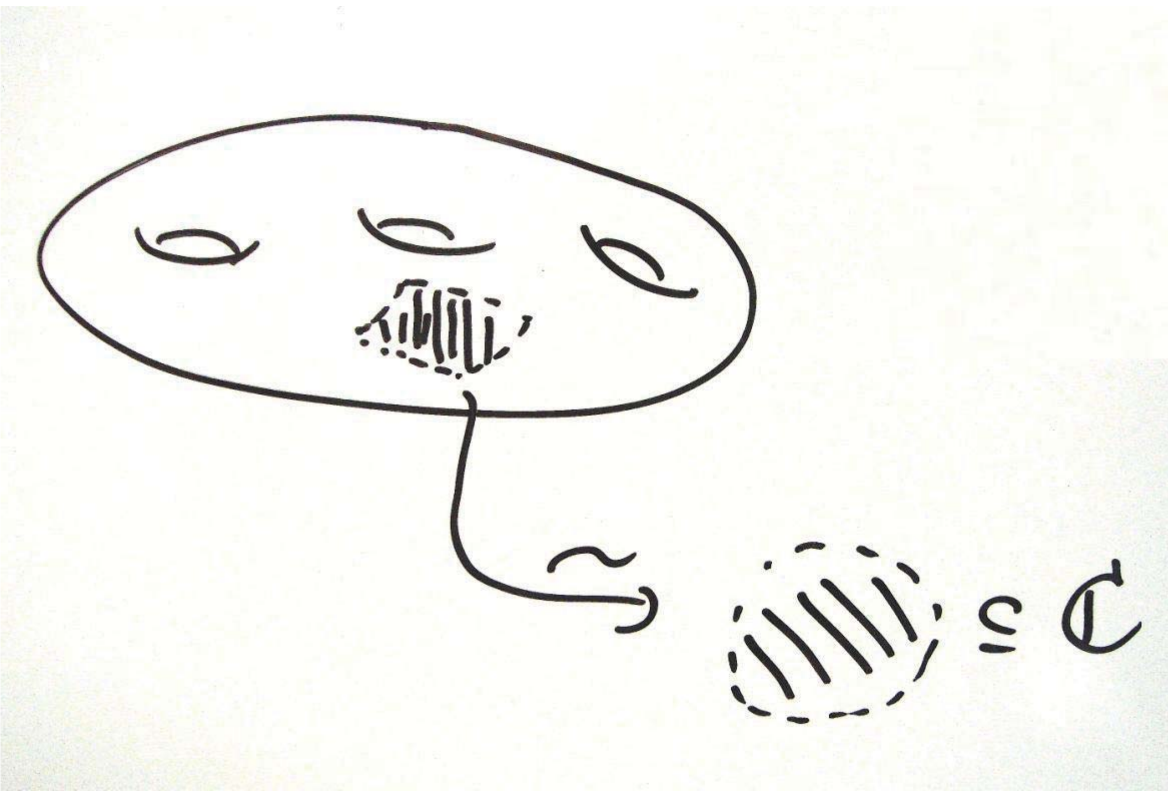
$\Big(\forall t \in T$, t を含む開近傍 U_t と埋め込み

$\iota_t : U_t \hookrightarrow \mathbb{C}\Big)$ s.t. $\forall t_1, t_2 \in T$, "$\iota_{t_2} \circ \iota_{t_1}^{-1}$"

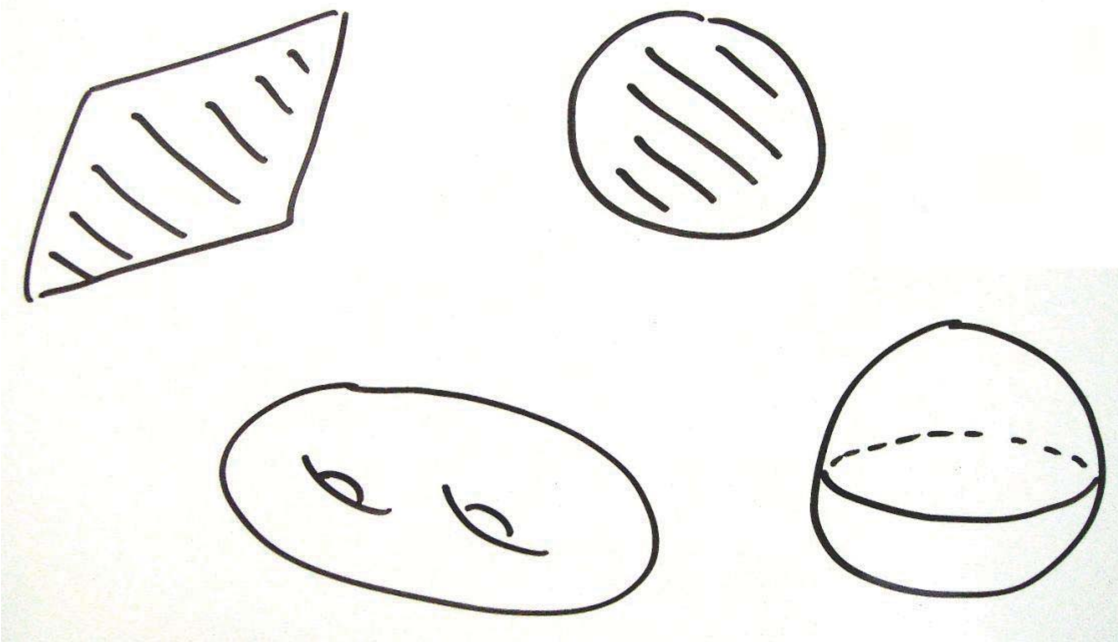
$$\mathbb{C} \supseteq \iota_{t_1}(U_{t_1 t_2}) \xrightarrow{\sim} U_{t_1 t_2} \xrightarrow{\sim} \iota_{t_2}(U_{t_1 t_2}) \subseteq \mathbb{C}$$

（ただし $U_{t_1 t_2} \overset{\mathrm{def}}{=} U_{t_1} \bigcap U_{t_2}$）は 正則 である。

注：定義により、リーマン面の開集合上の「正則な関数」を矛盾なく考察することができる。



リーマン面の基本的な例:　$\mathbb{C}$ の開集合、球面、種数 $g > 0$ の曲面。



一意化定理：　単連結（＝「普遍被覆は自分自身」）なリーマン面は、同型を除けば、$\mathbb{C}$、球面、単位円板 の三つしかない。

注:初等的複素解析の中ではやや難しい定理。

圏論的立場から見た問題点：定義が

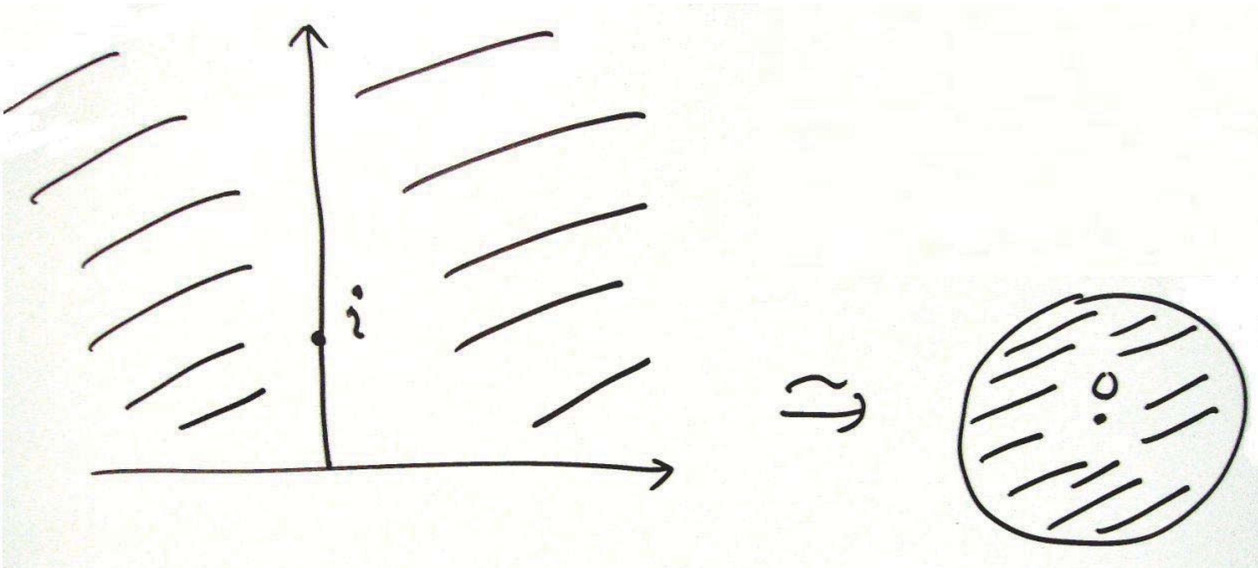
「参考モデル$\mathbb{C}$」

に本質的に依存していること。これを、絶対的かつ 内在的 な、組合せ論的 なものに取り替えたい。

§6. リーマン面としての上半平面

普遍被覆が単位円板と正則に同型になる連結なリーマン面を 双曲的 という。

「$z \mapsto (z-i)/(z+i)$」で上半平面は単位円板と正則に同型になることが分かる。



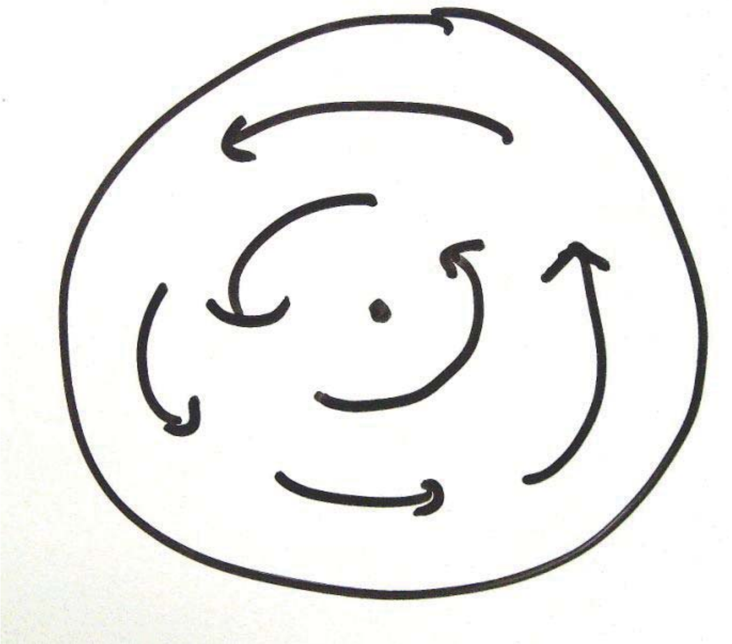
$PSL_2(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid ad-bc = 1 \right\} / \{\pm 1\}$$

は上半平面 H に作用する:

$$H \ni z \mapsto (az+b)/(cz+d) \in H$$

簡単に示せるように、この作用は <u>推移的</u>。一点を固定する部分群は、単位円板で見たとき、<u>回転群</u> になる。



<u>定理</u>：上半平面の自己同型群は、$PSL_2(\mathbb{R})$ によるものしかない。

<u>注</u>：初等的複素解析の基本的な結果。

<u>双曲的代数曲線の数論幾何の大きなテーマ</u>: この上半平面による一意化や、それに伴って生じる $PSL_2(\mathbb{R})$ の作用による幾何的現象の <u>数論版</u> の確立。